Esercizi Scelti a caso di Algebra Lineare
Corso di laurea in Matematica
2018

1. Sia f:$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una applicazione lineare. Si dimostri che esiste un sottospazio vettoriale W f-invariante tale che 0 <dimW ≤ 2

Svolgimento
Supponiamo che f abbia un autovalore reale λ e sia $\boldsymbol{v}$ un vettore relativo all'autovalore λ, allora il sottospazio $span(\boldsymbol{v})$ ha dimensione 1 ed e' f-invariante.
Supponiamo dunque che f non abbia autovalori reali, cioe' che il polinomio caratteristico di f non abbia fattori lineari. Consideriamo dunque $f_{\mathbb{C}}$ complessificata di f cosi' definita:

$$f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$$
$$f(\boldsymbol{z}) = f(\boldsymbol{a}) + if(\boldsymbol{b})$$

con $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$
allora il polinomio caratteristico di $f_{\mathbb{C}}$ e' completamente fattorizzabile e per ogni autovalore μ abbiamo anche l'autovalore $\bar{\mu}$. Inoltre se $\boldsymbol{z}$ e' un autovettore relativo a μ, allora $\bar{\boldsymbol{z}}$ e' un autovettore relativo a $\bar{\mu}$, infatti:

$$f_{\mathbb{C}}(\bar{\boldsymbol{z}}) = f_{\mathbb{C}}(\boldsymbol{a} - i\boldsymbol{b}) = \overline{f(a) + if(b)} = \overline{f(z)} = \bar{\mu}\bar{z}.$$

Dal fatto che $\mu, \bar{\mu} \notin \mathbb{R}$ sappiamo che $\mu \neq \bar{\mu}$ (ovvero sono diversi poiche' hanno parte immaginaria non nulla).
Da questo otteniamo che i vettori $\mathbf{z}$ e $\bar{\mathbf{z}}$ sono linearmente indipendenti, infatti se fossero uno multiplo dell'altro, gli autospazi V_μ e $V_{\bar{\mu}}$ avrebbero intersezione non nulla, assurdo.
Vogliamo adesso trovare una base *reale* di $span(\mathbf{z},\bar{\mathbf{z}})$ cioe' fatta di vettori reali. Consideriamo allora le combinazioni lineari:

$$\Re e(z) = \frac{\mathbf{z}+\bar{\mathbf{z}}}{2} = \mathbf{u}.$$
$$\Im m(z) = \frac{\mathbf{z}\text{-}\bar{\mathbf{z}}}{2i} = \mathbf{v}.$$

$\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono dunque vettori reali e usando le proprieta' di linearita' e svolgendo i calcoli:

$$f(\mathbf{u}) = f_{\mathbb{C}}(\frac{\mathbf{z}+\bar{\mathbf{z}}}{2}) = \frac{f_{\mathbb{C}}(\mathbf{z}) + f_{\mathbb{C}}(\bar{\mathbf{z}})}{2} = \frac{\mu z + \bar{\mu}\bar{z}}{2} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}$$
$$f(\mathbf{v}) = f_{\mathbb{C}}(\frac{\mathbf{z}\text{-}\bar{\mathbf{z}}}{2}) = \frac{f_{\mathbb{C}}(\mathbf{z}) - f_{\mathbb{C}}(\bar{\mathbf{z}})}{2} = \frac{\mu z - \bar{\mu}\bar{z}}{2} = \beta\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v}$$

e quindi $span(\mathbf{u},\mathbf{v})$ e' un sottospazio f-invariante di dimensione 2.

□